BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

3e JAARGANG 1926/27, Nr. 5



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 10 à 12 vel f 4.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 3.—.

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 4.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 3.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

☞ De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. W. KAPTEYN; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

---

volgende ondersteld, dat de eerste eigenschappen der omwentelingslichamen behandeld zijn. We stellen ons dan in de eerste plaats de vraag:

Waardoor wordt in de planimetrie de *richting* van een lijn bepaald? Daarvoor is voldoende een coördinatensysteem, bestaande uit één as. De hoek nu, die een willekeurige rechte l vormt met deze as, bepaalt geheel de richting van l. In het platte vlak bestaan er dus oneindig veel richtingen en de richting van een bepaalde lijn is òf *bepaald* òf *geheel onbepaald.*

Niet alzoo is de ruimte. Daarin nemen we weer aan een coördinatensysteem, nu bestaande uit één vlak, waarin één bepaald aangewezen lijn. De richting van een gegeven plat vlak is nu bepaald door twee hoeken, n.l. den standhoek tusschen het gegeven en het aangenomen vlak en den hoek van hun doorgang met de in het aangenomen vlak aangenomen rechte. Evenzoo is de richting van een gegeven rechte bepaald door twee hoeken, n.l. de hoek tusschen de rechte en het aangenomen vlak en den hoek, gevormd door haar projectie met de aangenomen rechte. In de ruimte bestaan er dus oneindig veel richtingen en de richting, zoowel van een gegeven plat vlak als van een gegeven lijn kan zijn òf *bepaald,* òf *half bepaald* of *geheel onbepaald.* De beteekenis dezer termen is evident. De zaak is slechts, of er van de de richting bepalende hoeken 2, 1 of 0 gegeven zijn. Toch lijkt het me niet overbodig van den term „half bepaald" nog eenige toelichting te geven. Ik geef die in den vorm van de beide volgende definities:

Definitie 1). *De richting van een lijn is half bepaald, als er een vlak of lijn van bepaalde richting is aan te wijzen, waarmee de gegeven lijn een gegeven hoek vormt.*

Is die hoek nul, dan ligt de lijn in het aangewezen vlak, of loopt er mee evenwijdig; is de hoek van nul verschillend, dan is de lijn beschrijvende rechte van een kegelmantel met een tophoek gelijk aan 2 × den gegeven hoek en als as de aangewezen rechte, die eventueel kan zijn loodlijn op het aangewezen vlak, of ze loopt met zulk een beschrijvende lijn evenwijdig. Er is dus nu nog slechts één hoek noodig om de richting van de lijn geheel te bepalen, n.l. de hoek van haar projectie op het aangewezen vlak, eventueel loodvlak op de aangewezen lijn, met een aangewezen rechte in dat vlak.

Definitie 2). *De richting van een vlak is half bepaald, als*

er een lijn of vlak van bepaalde richting is aan te wijzen, waarmee het vlak een gegeven hoek vormt.

Is die hoek 0°, dan gaat het vlak door de aangewezen rechte, of loopt er mee evenwijdig; is de hoek niet 0°, dan is het vlak raakvlak aan een kegelmantel met een tophoek gelijk aan 2 × den gegeven hoek en als as de aangewezen rechte, die eventueel weer kan zijn loodlijn op het aangewezen vlak, of het loopt er mee evenwijdig. Er is dus weer nog slechts één hoek noodig, om de richting van het vlak geheel te bepalen, n.l. de hoek van zijn doorgang met het aangewezen vlak, eventueel loodvlak op de aangewezen lijn, met een aangewezen rechte in dat vlak.

Gevolgen:

1. De richting van een lijn is *half bepaald*, als ze:
   a. ligt in een gegeven vlak, of er mee evenwijdig loopt,
   b. beschrijvende rechte is van een gegeven kegel, of er mee evenwijdig loopt.
2. De richting van een lijn is *geheel bepaald*, als ze evenwijdig loopt aan een gegeven rechte, welke kan ontstaan door snijding van:
   a. 2 gegeven platte vlakken, als bedoeld in 1*a*;
   b. 2 gegeven kegels met gemeenschappelijke top, als bedoeld in 1*b*;
   c. een gegeven plat vlak, als bedoeld in 1*a* met een kegel, als bedoeld in 1*b*, welks top in het gegeven platte vlak ligt.
3. De richting van een vlak is *half bepaald*, als het:
   a. gaat door een gegeven rechte, of er mee evenwijdig loopt;
   b. raakt aan een gegeven kegel, of evenwijdig loopt met een gegeven beschrijvende rechte.
4. De richting van een vlak is *geheel bepaald*, als het evenwijdig loopt aan een gegeven vlak, hetwelk kan worden bepaald door:
   a. 2 snijdende rechten, als bedoeld in 3*a*;
   b. 2 gegeven kegels met gemeenschappelijken top, als bedoeld in 3*b*, waaraan het gegeven vlak moet raken.
   c. een gegeven rechte, als bedoeld in 3*a*, die gaat door den top van een kegel, als bedoeld in 3*b*, waaraan het gegeven vlak moet raken.

* * *

Het voorgaande vindt zijn toepassing in het **bepalen** van de richting van lijnen of vlakken, die *gegeven* hoeken maken met 1 of 2 lijnen of vlakken, zoowel als in het **bepalen** van die richting, als de gevraagde lijnen of vlakken *gelijke* hoeken moeten maken met 2 of 3 lijnen of vlakken.

Voor wat betreft het eerste volsta het volgende overzicht:

1e. Een lijn, die een gegeven hoek maakt met een gegeven rechte, is beschrijvende rechte van een kegelmantel met de gegeven rechte als as, een willekeurig punt er van als top en een tophoek gelijk aan 2 $\times$ den gegeven hoek.

2e. Een lijn, die een gegeven hoek α maakt met een gegeven plat vlak, maakt een hoek $90° - \alpha$ met een willekeurige loodlijn op dit vlak, waardoor dit geval is teruggebracht tot sub 1.

De richting in beide gevallen is nu slechts half bepaald. De *lijn zelf* is geheel bepaald, als een der beide bovenstaande gegevens wordt aangevuld met het gegeven „een vlak, waarin de lijn moet liggen".

Toepassing: Construeer een drievlakshoek, waarvan gegeven zijn 2 zijden en de hoek tegenover één dier zijden.

3e. De richting van een lijn uit sub 1 of sub 2 is geheel bepaald, als zij is gemeenschappelijke beschrijvende rechte van 2 kegels met denzelfden top. Die top kan willekeurig worden gekozen en zoo kan de lijn

a. gegeven hoeken maken met 2 rechten;

b. gegeven hoeken maken met 1 rechte en 1 vlak;

c. gegeven hoeken maken met 2 vlakken.

De *lijn zelf* is nu geheel bepaald, als de gegevens worden aangevuld met het gegeven „een punt, waardoor de lijn moet gaan".

Toepassing: Construeer een drievlakshoek, waarvan gegeven zijn de 3 zijden.

4e. Een vlak, dat een gegeven hoek maakt met een gegeven lijn is raakvlak aan een kegelmantel met de gegeven rechte als as, een willekeurig punt er van als top en een tophoek gelijk aan 2 $\times$ den gegeven hoek.

5e. Een vlak, dat een gegeven hoek α maakt met een gegeven vlak, maakt een hoek $90° - \alpha$ met een willekeurige loodlijn op dat vlak, waardoor dit geval weer is teruggebracht tot sub 4.

De richting in beide laatste gevallen is nu weer slechts half bepaald. Het *vlak zelf* is geheel bepaald, als een der beide gegevens

wordt aangevuld met het gegeven „een lijn, waardoor het vlak moet gaan."

Toepassing: Construeer een drievlakshoek, waarvan gegeven zijn 2 hoeken en de zijde tegenover één dier hoeken.

6e. De richting van een vlak uit sub 4 of sub 5 is geheel bepaald, als het is gemeenschappelijk raakvlak aan twee kegels met denzelfden top. Die top kan willekeurig worden gekozen en zoo kan het vlak

a. gegeven hoeken maken met 2 rechten;

b. gegeven hoeken maken met 1 rechte en 1 vlak;

c. gegeven hoeken maken met 2 vlakken.

Het *vlak zelf* is nu geheel bepaald, als de gegevens worden aangevuld met het gegeven „een punt, waardoor het vlak moet gaan".

Toepassing: Construeer een drievlakshoek, waarvan gegeven zijn de 3 hoeken.

Als voorbeeld, wat alleen reeds met het voorgaande systematisch kan worden bereikt, geef ik de volgende constructieopgave: Construeer een vlak, dat

1. een gegeven hoek α maakt met een gegeven rechte;
2. een gegeven hoek β maakt met een gegeven vlak; en
3. een gegeven hoek γ maakt met een gegeven bol.

* * *

Een dergelijk overzicht is eveneens samen te stellen voor het geval, dat de gevraagde lijnen of vlakken *gelijke* hoeken moeten maken met gegeven lijnen of vlakken. Daar hiervoor de theorie van den kegel niet noodig is en we deze zaken zeer gevoeglijk kunnen behandelen na de bekende meetkundige plaatsen in de ruimte, is het voldoende, als we vooraf stipuleeren, dat:

a. de richting van een **lijn** half bepaald is, als er een *vlak* is aan te wijzen, waarmee de lijn evenwijdig moet loopen;

b. de richting van een **lijn** geheel bepaald is, als er een *lijn* is aan te wijzen, waarmee de lijn evenwijdig moet loopen;

c. de richting van een **vlak** half bepaald is, als er een *lijn* is aan te wijzen, waarmee het vlak evenwijdig moet loopen;

d. de richting van een **vlak** geheel bepaald is, als er een *vlak* is aan te wijzen, waarmee het vlak evenwijdig moet loopen.

Op grond van dit voorgaande komen we tot het volgende overzicht:

1e. Een lijn, die gelijke hoeken maakt met 2 lijnen, ligt in één

der beide „bissectricevlakken" [1]) van den hoek, gevormd door die 2 lijnen, of loopt met ten minste een ervan evenwijdig.

2e. Een lijn, die gelijke hoeken maakt met 2 vlakken, ligt in één der beide bissectricevlakken van den tweevlakshoek, gevormd door die twee vlakken, of loopt met ten minste een ervan evenwijdig.

De richting van de gevraagde lijn is in beide voorgaande gevallen maar weer half bepaald, daar slechts een *vlak* is aan te wijzen, waarmee de lijn evenwijdig loopt. Om de *lijn zelf* geheel te bepalen, moet, evenals in het voorgaande, het gegeven worden aangevuld met „een vlak, waarin de lijn ligt".

3e. Een lijn, die gelijke hoeken maakt met 3 lijnen of 3 vlakken, heeft een geheel bepaalde richting. Ze loopt immers evenwijdig met een der doorgangen van 2 vlakken als sub 1 of sub 2 bedoeld. Daar telkens 3 binnenbissectricevlakken, dan wel één binnen- en 2 buitenbissectricevlakken, één rechte gemeen hebben, zijn er dus in beide gevallen 4 rechten aan te wijzen, met één van welke de gevraagde rechte evenwijdig moet loopen. Vormen we met de 3 gegeven rechten als ribben, of met de 3 gegeven vlakken als zijden een drievlakshoek, dan liggen deze 4 rechten respectievelijk binnen den drievlakshoek zelf, en binnen een van zijn 3 nevendrievlakshoeken.

Om de gevraagde rechte geheel te bepalen, vullen we weer aan met „een punt waardoor ze gaan moet".

4e. Een vlak, dat gelijke hoeken maakt met 2 lijnen, gaat door één der beide bissectrices van den hoek, gevormd door die 2 lijnen, of loopt er mee evenwijdig.

5e. Een vlak, dat gelijke hoeken maakt met 2 vlakken, staat loodrecht op één der beide bissectricevlakken van den tweevlakshoek, gevormd door die 2 vlakken, d.w.z. loopt evenwijdig met een willekeurige loodlijn op één dier beide vlakken.

Ook sub 4 en sub 5 is dus de richting half bepaald, daar slechts een *lijn* is aan te wijzen, waarmee het gevraagde vlak evenwijdig moet loopen. Om het *vlak zelf* geheel te bepalen, moet weer het gegeven worden aangevuld met „een lijn, waardoor het vlak gaat".

6e. Een vlak, dat gelijke hoeken maakt met 3 lijnen of 3 vlakken,

---

[1]) Op grond van analogie-overwegingen — vergelijk drievlakshoek, waarnaast boldriehoek, slechts met den vlakken driehoek! — lijkt het me anders juister in dit geval van „middelloodvlak van de 2e soort" te spreken. C.

heeft een geheel bepaalde richting. Het loopt immers evenwijdig met een der snijvlakken van 2 lijnen, als in sub 4 of sub 5 bedoeld. Ook hier zijn 4 vlakken aan te wijzen, met één van welke het gevraagde vlak evenwijdig loopen moet.

Om het gevraagde vlak geheel te bepalen, moeten de gegevens weer worden aangevuld met „een punt, waardoor het vlak gaan moet.".

* * *

In vele vraagstukken komen de gegevens, die de richting van een lijn of een vlak bepalen, op min of meer handige wijze „gecamoufleerd" voor. Ik wil er eenige noemen. Elk collega kan daarna ongetwijfeld mijn opsomming met verschillende andere voorbeelden uitbreiden. Ook deze dingen zullen zich stellig niet onttrekken aan een systematische behandeling. Ik noem:

1e. De gevraagde *rechte* staat loodrecht op een te bepalen rechte, komt voor in den volgenden vorm:

1. 2 gegeven punten projecteeren zich in hetzelfde punt.
2. 2 zijden van een ongelijkzijdigen driehoek projecteeren zich als gelijke lijnstukken.

2e. De gevraagde *rechte* maakt een gegeven hoek met een te bepalen rechte, kan voorkomen in den volgenden vorm:

De projecties van 2 gegeven punten op de gevraagde rechte hebben een gegeven afstand.

3e. De gevraagde rechte staat loodrecht op een te bepalen vlak V, komt voor als:

3 punten projecteeren zich in hetzelfde punt.

4e. Een gevraagd vlak evenwijdig aan een te bepalen lijn, komt voor in diverse vormen, n.l.:

1. een rechte hoek projecteert zich er op als een rechte hoek.
2. een gelijkbeenige driehoek, ruit, koordenvierhoek projecteeren zich als gelijkbeenige driehoek, ruit en koordenvierhoek.
3. het gevraagde vlak loopt evenwijdig aan een der beide beenen van een gegeven hoek en het in lengte gegeven andere been projecteert er zich in gegeven lengte op.
4. een parallelogram projecteert zich als ruit.
5. een ruit projecteert zich als vierkant.

5e. Een gevraagd vlak is loodrecht op een te bepalen lijn, komt voor als:

1. 2 punten projecteeren zich als 1 punt.

2. de projecties van 2 kruisende rechten van gegeven lengte halveeren elkaar.
3. een scheeve vierhoek projecteert zich als parallelogram.
4. 2 snijlijnen van gegeven lengte, gemeten van het snijpunt af, hebben dezelfde projectie ook in lengte.
5. 2 kruisende rechten van gegeven lengte hebben evenwijdige en gelijke projecties.
6. de projectie van het hoekpunt C van △ ABC valt midden op de projectie van AB.

6e. Een gevraagd vlak loodrecht op een te bepalen vlak, komt voor als:

1. De projecties van 2 kruisende lijnen zijn evenwijdig.
2. Een willekeurige veelhoek projecteert zich als een rechte.

Als gezegd, het zal niemand moeilijk vallen, deze voorbeelden nog met ettelijke te vermeerderen.

* * *

Zooals door mij de vraag naar de *richting* van lijnen en vlakken in de ruimte in het voorgaande systematisch behandeld is, zoo is, naar ik meen, ook de vraag naar de *ligging* van punten, lijnen en vlakken in de ruimte, na de noodige voorbereiding, geheel systematisch te behandelen. Ik zal die behandeling niet voor mijn rekening nemen, maar meen, dat daarbij een stel opgaven als de volgende goede diensten kan bewijzen:

Bepaal de **ligging** van:

1. Een punt met *gegeven* afstand tot 1 punt, 1 lijn, 1 vlak.
2. Een lijn met *gegeven* afstand tot 1 punt, 1 lijn, 1 vlak.
3. Een vlak met *gegeven* afstand tot 1 punt, 1 lijn, 1 vlak.
4. Een punt met *gegeven* afstanden tot 2 p., 2 l., 2 vl.
5. Een lijn met *gegeven* afstanden tot 2 p., 2 l., 2 vl.
6. Een vlak met *gegeven* afstanden tot 2 p., 2 l., 2 vl.
7. Een punt met *gelijke* afstanden tot 2 p., 2 l., 2 vl.
8. Een lijn met *gelijke* afstanden tot 2 p., 2 l., 2 vl.
9. Een vlak met *gelijke* afstanden tot 2 p., 2 l., 2 vl.
10. Een punt met *gelijke* afstanden tot 3 p., 3 l., 3 vl.
11. Een lijn met *gelijke* afstanden tot 3 p., 3 l., 3 vl.
12. Een vlak met *gelijke* afstanden tot 3 p., 3 l., 3 vl.

De opgaven zijn nog met enkele te vermeerderen (b.v. de ligging van een punt met *gegeven* afstanden tot 3 punten of *gelijke* afstanden

tot vier punten) en ook zijn er enkele bij, die niet elementair te behandelen zijn, maar dat kan ieder voor zich zelf uitmaken.

Ten slotte behoeft het niet te verwonderen, als ook de vraag naar de *ligging* van een punt, een lijn of een vlak „gecamoufleerd" kan voorkomen.

* * *

Na de voorgaande uiteenzettingen bieden zelfs vrij lastige vraagstukken over het construeeren van ruimte-elementen, die aan bepaalde voorwaarden te voldoen hebben, geen overwegende moeilijkheden meer. Mits men slechts een volstrekte scheiding van alle gegevens doorvoert en er zich bij elken stap in de redeneering rekenschap van geeft, in hoeverre òf de *richting* òf de *ligging* van de gevraagde lijn of het gevraagde vlak door de successievelijk beschouwde voorwaarden bepaald wordt.

Nemen we als voorbeeld het niet-eenvoudige vraagstuk No. 9 van blz. 153 uit Molenbroeks „Leerboek der Stereometrie" 6e druk:

„Gegeven zijn de punten P, Q en R, benevens een rechte l en een hoek α. Gevraagd een rechte te construeeren, waarop P en Q zich als één punt projecteeren, die l op den afstand d onder een hoek α kruist en op een afstand r van R verwijderd is."

Oplossing: Beginnen we de gegevens streng te scheiden in het volgende viertal, waarvan de beide eerste de *richting* en de beide laatste de *ligging* van de gevraagde rechte x bepalen.

1. x kruist de rechte PQ onder een hoek van 90°.
2. x kruist l onder een hoek α.
3. x is van punt R verwijderd op een afstand r.
4. x is van rechte l verwijderd op een afstand d.

We behoeven na het voorgaande niet meer uiteen te zetten, dat de eerste beide voorwaarden, die elk een halve bepaaldheid opleveren, tezamen de richting van de gevraagde rechte volledig bepalen, daar er een lijn l' ontstaat, waarmee x evenwijdig moet loopen.

In verband met de voorwaarden 3 en 4 reduceert zich nu het vraagstuk tot den veel eenvoudiger vorm:

„Construeer aan een gegeven bol en een gegeven cylinder een gemeenschappelijke raakrechte evenwijdig aan een gegeven rechte l'"

Dit vraagstuk is geheel opgelost door de beide volgende overwegingen:

1e. een raakrechte aan een bol evenwijdig aan een gegeven rechte is beschrijvende rechte van een bepaalden omhullingscylinder.

2e. een raakrechte aan een cylinder evenwijdig aan een gegeven rechte is gelegen in één van de 2 raakvlakken aan den gegeven cylinder, evenwijdig aan de gegeven rechte.

De gevraagde rechte x is dus een gemeenschappelijke rechte van het cylindervlak uit sub 1 met een der beide raakvlakken uit sub 2.

* * *

Ik weet niet, of wij ooit zoover zullen komen, maar het komt mij voor, dat, als vraagstukken van het voorgaande type door een systematische behandeling voor onze leerlingen geen moeilijkheden van beteekenis meer zullen opleveren, er plaats komt voor vraagstukken van wat pittiger gehalte, vraagstukken ook meer in overeenstemming met een verdergaand onderwijs in de beschrijvende meetkunde. Ik bedoel constructievraagstukken, waarin wordt gevraagd *ruimtefiguren* te construeeren, zooals de meeste onder planimetrieconstructie vragen *vlakke figuren* te construeeren, waarvan een voldoend aantal elementen gegeven is. De bestaande leerboeken geven daaromtrent weinig of niets. Toch moet het m. i. niet moeilijk zijn naast b. v. de tallooze vraagstukken, waarin uit 3 gegevens gevraagd wordt een driehoek te construeeren, een voldoend aantal analoge vraagstukken te geven betreffende den drievlakshoek of het viervlak.

Ik noem b.v. bij den drievlakshoek:

1. Gevraagd een drievlakshoek te construeeren, waarvan gegeven zijn: een hoek, de tophoek van den ingeschreven kegel en de tophoek van den binnen den gegeven hoek aangeschreven kegel.
2. Idem, waarvan gegeven zijn: een hoek en de tophoeken van de beide binnen de 2 andere hoeken aangeschreven kegels.
3. Idem, waarvan gegeven zijn: een zijde, de overstaande hoek en de som der beide andere zijden.
4. Idem, waarvan gegeven zijn: een zijde, de overstaande hoek en het verschil der beide andere zijden.
5. Idem, waarvan gegeven zijn: het hoogtevlak op de zijde a, het mediaanvlak op idem en de zijden a òf b (òf de hoek B òf de tophoek van den omgeschreven kegel).
6. Idem, waarvan gegeven zijn: het hoogtevlak op de zijde a, het bissectricevlak op idem en de zijde, a òf b (òf de hoek B, òf de tophoek van den ingeschreven kegel).

Deze voorbeelden zijn met tallooze andere te vermeerderen. En ook bij het viervlak zijn overeenkomstige vraagstukken niet moeilijk te vinden. Dit laat ik echter aan de liefhebbers over. Ik ben al tevreden, als dit artikel een ietsje mag bijdragen tot oplossing van de moeilijke opgave, die men ons stelt, om het ruimteinzicht onzer leerlingen tot een bevredigende ontwikkeling te brengen.

Djokja. B. Coster.

ONTWERP-LEERPLAN VOOR WISKUNDE EN AANVERWANTE VAKKEN VOOR DE H.B.S. MET 5-JARIGEN CURSUS.

De Commissie, die van het College van Inspecteurs van het M. O. de opdracht ontving, een onderzoek in te stellen naar den toestand van het onderwijs in wiskunde en aanverwante vakken op de H.B.Scholen met 5-jarigen cursus, heeft in het door haar ingediende ontwerp-leerplan de volgende wijzigingen en aanvullingen aangebracht.

(De nummering der bladzijden heeft betrekking op de pagineering van Jaargang II van het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.)

VOORSTEL TOT WIJZIGING VAN HET ONTWERP-LEERPLAN.

Rekenkunde.

Klasse I. Een lid der Commissie stelt voor, de rekenkunde en de algebra tot een geheel te vereenigen.

Klasse II. blz. 116; r. 22 v.b. Te lezen: „Eenvoudigste begrippen van onnauwkeurige getallen."

Algebra.

Klasse II. blz. 118; r. 7 v.o. Toevoegen: „Eenvoudige ingekleede vergelijkingen van den eersten graad."

blz. 118; r. 5 v.o. Schrappen: „De bewijsmethode der volledige inductie".

blz. 118; r. 2 v.o. Schrappen: „De formule voor de macht van een binomium voor geheele rekenkundige waarden van den exponent".

blz. 119; r. 6 v.b. Lezen: „Practische oplossing van een stelsel enz."

blz. 119; r. 11 v.b. Inplaats van „geen hoogere dan" lezen: „niet meer dan twee".

Klasse III. blz. 119; r. 13 v.b. Toevoegen: „De bewijsmethode der volledige inductie."

Klasse IV; V. blz. 119; r. 23 v.b. Lezen: „Beginselen van een theorie van het irrationale getal".

blz. 119; r. 30 v.b. Schrappen: „Continuiteit; theorema van Rolle; middelwaardestelling."

blz. 119; r. 31 v.b. Lezen: „Tweede afgeleide."

blz. 119; r. 37 v.b. Alleen lezen: „Beginselen der Integraalrekening." Verder schrappen tot „Algemeene Herhaling."

Gonio- en Trigonometrie.

Klasse III. blz. 129; r. 5 v.o. Vanaf: „Optellingstheorema's..." tot aan: „De radiaal als hoekmaat", overbrengen naar Klasse IV.

Klasse V. blz. 138; r. 14 v.b. Schrappen: „Formules voor sinus en cosinus van veelvouden van hoeken."

Meetkunde.

Klasse II. blz. 131; r. 21 v.b. Lezen: „Het begrip en de eenvoudigste eigenschappen van de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens en de toepassingen daarvan op de meetkunde.

Klasse III. blz. 131; r. 11 v.o. Schrappen: „Hoek van twee cirkels... van drie cirkels."

Klasse IV. blz. 132; r. 9 v.b. Overbrengen naar Klasse V: „Cylinder... constructies."

Klasse V. blz. 132; r. 14 v.o. Schrappen: Regelmatige lichamen. Symmetrie-elementen.

Mechanica.

Klasse IV. blz. 135; r. 8 v.b. Schrappen: „Historische motiveering van de axioma's der mechanica."

Klasse V. blz. 136; r. 5 v.b. Schrappen: „Balans".

Namens de Commissie,

E. J. Dijksterhuis, *Secretaris.*

NOG EEN OPMERKING IN VERBAND MET MIJN NASCHRIFT IN No. 3 VAN DEZEN JAARGANG.

Naar mij bleek, is hetgeen ik schreef op blz. 119 en 120 door sommigen opgevat als een afbrekende recensie van het leerboek der algebra, samengesteld door de heeren *Dr. L. Yntema, A. J. Drewes B. Fzn.* en *Th. B. Bloten.*

Ik stel er prijs op te verklaren, dat dit niet mijne bedoeling is geweest. Artikelen, die in de eerste plaats beoogen een kritische bespreking van schoolboeken, behooren m.i. in dit tijdschrift slechts bij uitzondering thuis. Mijne opmerkingen moesten natuurlijk worden genomen in verband met het voorgaande. Als tegenwicht voor het niet gezochte effect mag ik misschien wel meedeelen, dat het werk in kwestie op vele punten getuigt van een sympathiek streven.

Het is mij gebleken, dat overwegingen van didaktischen aard den doorslag hebben gegeven bij de formuleering van eenige der als minder juist gesignaleerde passages. Welke concessies hier geoorloofd zijn, is een sterk subjectieve zaak. Slechts vestig ik er de aandacht op, dat ook hier tot uiting komt de meening, dat men de moderne exactheid niet op onze leerlingen mag loslaten.

Amsterdam, April '27. B. P. Haalmeijer.

BOEKBESPREKING.

Algebra voor Voorbereidend Hooger- en Middelbaar Onderwijs, door Dr. L. Yntema, A. J. Drewes, Th. B. Bloten. 4 deelen. J. B. Wolters, Groningen, Den Haag.

Van de hand van de heeren Yntema, Drewes en Bloten verscheen het hier boven aangekondigde leerboek der Algebra in vier deelen, een werk, dat ongetwijfeld met groote belangstelling zal zijn ontvangen door allen, die meeleven in de huidige ontwikkelingsperiode van ons wiskunde-onderwijs. Dit boek toch is het eerste, in ons land verschijnende, voor voorbereidend hooger en middelbaar onderwijs bestemde werk, waarin niet alleen gestreefd wordt naar het doel, in de traditioneele onderwerpen der algebra het functioneele element meer tot zijn recht te doen komen, maar waarin tevens in verband met de elementaire algebra de beginselen van de Differentiaal- en Integraalrekening besproken worden, de opbouw van het getalbegrip tot onderwerp van een afzonderlijk hoofdstuk wordt gemaakt en een vrij uitvoerig overzicht over de historische ontwikkeling der elementaire wiskunde wordt gegeven.

Het verschijnen van een werk, waarin zoo resoluut met de bestaande orde van zaken wordt gebroken, mag in geen geval onopgemerkt voorbijgaan; de schrijvers, die een zeer omvangrijk werk naar hun beste weten tot een eind brachten, hebben er recht op, dat aandacht worde geschonken aan wat zij tot stand brachten; nog veel sterker eischt het belang van het onderwijs, dat, nu hier werkelijk het streven naar reorganisatie van de lagere algebra vollediger in een daad is omgezet, dan te voren ooit geschiedde, de wijze, waarop dit geschied is, noch blindelings worde veroordeeld, noch kritiekloos worde verheerlijkt, maar dat ernstig worde nagegaan, of de gewenschte vernieuwing, niet zoozeer van de stof, als wel van den geest van het onderwijs in de algebra, door het nieuwe werk wordt bevorderd.

Wij verkeeren nu in de noodzakelijkheid, te moeten verklaren,

dat dit naar onze meening niet het geval is; wij doen dit met volledig inzicht in de groote moeilijkheid van de door de schrijvers ondernomen taak, met groote waardeering ook voor hun streven naar verwezenlijking der moderne denkbeelden en wij meenen daarom, die verklaring in eenige uitvoerigheid met gronden te moeten steunen.

Die gronden zijn van tweeërlei aard; zij betreffen eenerzijds vragen van didactischen aard, aangaande de wenschelijkheid van het opnemen van bepaalde onderwerpen en van het toepassen van bepaalde methoden, punten dus, waarover verschil van meening mogelijk is en waarover wij slechts onze gemeenschappelijke zienswijze als zoodanig willen uitspreken; anderzijds echter hebben zij betrekking op mathematische feiten, waar het niet langer om meerdere of mindere wenschelijkheid, maar om al of niet juistheid gaat en waar dus voor persoonlijk meeningsverschil al veel minder plaats is.

Wij zouden er dan in de eerste plaats op willen wijzen, dat de schrijvers blijkbaar voorstanders zijn van een zekere concentriciteit in de leermethode, welke hierin bestaat, dat men onderwerpen, waarin principiëele denkmoeilijkheden verborgen liggen, eerst behandelt, alsof die moeilijkheden niet aanwezig waren, om ze dan later op meer diepgaande wijze te herzien. De meest opvallende voorbeelden hiervan treft men aan bij de irrationale getallen en bij het limietbegrip. Nu is uit den aard der zaak deze methode, ondanks de daaraan verbonden bezwaren (voornamelijk bestaande in het gevaar, dat gedachtelooze rekentechniek wordt aangekweekt) niet steeds geheel te vermijden: in het bijzonder moet men eerst heel wat over irrationale getallen behandelen, voor men er aan kan gaan denken, een eenigszins exacte theorie over dit onderwerp te gaan bespreken. Toch zou men ook op dit gebied van den aanvang af al het een en ander kunnen doen, om voortdurend het besef levendig te houden, dat men, sprekende over het „getal" $\sqrt{2}$, dit woord gebruikt in een nieuwe, nader te motiveeren en te fundeeren beteekenis, omdat immers een getal, welks quadraat gelijk is aan 2, in den bestaanden getallenvoorraad niet voorkomt. Zooals de schrijvers echter te werk gaan (II, 74), moet de leerling, naar wij vreezen, den indruk krijgen, dat zulk een getal in den hem bekenden getallenvoorraad wel aanwezig is, maar dat het alleen daarom niet juist te bepalen is, omdat de gebruikelijke

algorithmus der worteltrekking niet tot een resultaat voert. Zou het hem niet toeschijnen, alsof het een soortgelijke kwestie is, als bij de decimaalbreukontwikkeling van rationale getallen, waar hij ook een getal als $\frac{1}{3}$, hoewel toch voorkomend in den getallenvoorraad, niet als een afbrekende decimaalbreuk kan schrijven?

In ieder geval, zoo hij hier nog even aan het twijfelen is gebracht of de afspraak: *onder $\sqrt{5}$ verstaan we volgens de definitie: het getal, welks quadraat 5 is,* eigenlijk wel iets beteekent, dan zal hij dien twijfel wel volkomen weer verliezen, wanneer, voordat aan het eind van het vierde deel de ontwikkeling van het getalbegrip behandeld wordt, verder maar al met irrationale getallen wordt gewerkt, zonder dat ooit weer de aandacht gevestigd wordt op het probleem, wat deze nog steeds zinledige symbolen nu toch eigenlijk beteekenen. Wanneer het dan ten slotte tot een theorie van het irrationale getal komt, zal deze, naar het ons voorkomt, niet gevoeld worden als de nu eindelijk te begrijpen oplossing van het reeds zoo vaak aangeroerde probleem, maar als een onthulling, hoe vaak in de afgeloopen jaren gewerkt is met zinledige uitdrukkingen in een wetenschap, die juist altijd in de eerste plaats eischte, dat men zich rekenschap zou geven van de beteekenis van de gebruikte termen.

Ernstiger nog lijkt ons het ontwikkelde bezwaar, waar het de invoering van het limietbegrip en het gebruik van het woord „oneindig" betreft. Alle termen, die hierbij ter sprake komen: *limiet, oneindig veel, oneindig groot, naderen tot* enz. behooren, naar onze meening, in het onderwijs met de uiterste omzichtigheid en onder volstrekt verbod van gedachteloos gebruik, te worden ingevoerd; men heeft hierbij namelijk de blijkbaar aangeboren neiging te bestrijden, zich van deze woorden te bedienen, alsof ieder vanzelf zou weten, wat ze beteekenen en men zal er dus den nadruk op moeten leggen, dat zij zonder voorafgaande definitie niets, maar dan ook hoegenaamd niets, beduiden. Wat doen nu echter de schrijvers? Terwijl het limietbegrip pas in het begin van het vierde deel systematisch ter sprake komt, worden aan het eind van het derde deel reeds onderwerpen behandeld, waarbij dat begrip onmisbaar is en waarvan dus de uiteenzetting noodzakelijk te wenschen over moet laten. Temeer, omdat binnen het bedoelde hoofdstuk van Deel III (Hoofdstuk XII) ook alweer de

neiging der schrijvers merkbaar is, eerst slordige uitdrukkingen toe te laten en deze dan later recht te zetten. Zoo stellen ze (III, 130) de zinledige vraag, of een reeks met een oneindig aantal termen een eindige som kan hebben, geven ter beantwoording van die vraag pas een definitie van het daarin optredende begrip som en definieeren dit dan met behulp van het nog niet gedefinieerde, maar slechts aan een voorbeeld gedemonstreerde, begrip grenswaarde.

Zoo staan zij telkens den leerling toe, zich van nog niet gedefinieerde termen op een slordige wijze te bedienen: zoo leest men in deel II (blz. 16) de o.i. af te keuren uitspraak: „we nemen x eerst absoluut zeer groot en negatief. Men noemt dit *min oneindig*". Dezelfde leerling, die dit op gezag van het leerboek heeft aanvaard, wordt echter op blz. 24 van Deel IV gewaarschuwd voor de fout, bij $+\infty$ of $-\infty$ te denken aan een standvastig getal.

Een derde voorbeeld van de gesignaleerde methode levert de wijze, waarop omgegaan wordt met het begrip doorloopendheid (waartoe dit leelijke woord inplaats van het internationale en historisch goed gemotiveerde „continuïteit"?) van een functie. Dit woord wordt III, 46 zonder eenige voorafgaande definitie gebruikt, III, 61 eenigszins toegelicht, maar pas IV, 44 gedefinieerd.

Een tweede algemeen bezwaar, dat wij tegen de methode der schrijvers zouden willen aanvoeren, is hun neiging, om meer onderwerpen te behandelen, dan voor grondig en vruchtdragend onderwijs in de algebra noodig zijn. Reeds in hun werk blijkt het gevaar niet denkbeeldig te zijn, dat de meer op het functioneele denken gerichte onderwijsmethode der algebra, evengoed als de tot dusver traditioneele in de verleiding zal komen, onderwerpen op te nemen, waaraan eigenlijk geen behoefte bestaat, maar die slechts ingevoerd worden, om er oefenmateriaal aan te ontleenen. Zoo achten wij het hoofdstuk IX van Deel III, waarin de functie

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$$

besproken wordt, geheel overbodig. Men kan, dunkt ons, volstaan met de behandeling van de homographische functie, omdat deze reeds aanleiding geeft tot kennismaking met het begrip asymptoot. Ook van de hoofdstukken VI en VII van hetzelfde deel lijkt ons de uitvoerige behandeling, die de schrijvers geven, niet noodig.

Een soortgelijke opmerking geldt voor het hoofdstuk VI van

Deel IV. Natuurlijk zou het zeer toe te juichen zijn, indien het getalbegrip werkelijk in deze uitvoerigheid zou kunnen worden ontwikkeld, maar daarvoor zou in de eerste plaats een veel grootere nauwgezetheid van behandeling noodig zijn, dan de schrijvers hebben weten te bereiken. Waar deze ontbreekt, kan naar wij vreezen, uitvoerigheid slechts schijnweten kweeken, wat toch onmogelijk de bedoeling der schrijvers kan zijn.

Verbazing wekt het dan weer, het onderwerp der complexe getallen met nadruk van de Lagere Algebra uitgesloten te zien; naar onze meening behoort het daarin veel meer thuis, dan tal van onderwerpen, die de schrijvers wel opnamen. Ten eerste leent het zich, vooral in geometrischen opzet, tot een aan behoorlijke eischen van strengheid voldoende behandeling, die binnen het begrip der leerlingen valt; ten tweede lijkt het ons onmisbaar, omdat men pas vanaf het door deze laatste uitbreiding van het getalbegrip bereikte standpunt uit den juisten kijk op de voorafgegane uitbreidingen krijgt; de ware beteekenis van de invoering van negatieve, gebroken en irrationale getallen kan pas in haar vollen omvang worden beseft, wanneer de wensch, nu ook nog de uitvoerbaarheid van de vierkantsworteltrekking uit negatieve getallen te redden, voert tot een getallensoort, die aan het mathematisch onontwikkelde denken aanvankelijk veel minder reëel lijkt dan de toch even imaginaire vroeger ingevoerde soorten.

Nu de schrijvers echter de theorie van het complexe getal hebben willen vermijden, ware het wellicht verkieselijker geweest, indien zij ook nooit van die soort getallen hadden gerept. Ze hadden maar rustig „als uitzondering" (III, 11), als men het zoo noemen wil, het feit moeten aanvaarden, dat $x^2 + 6{,}25$ niet nul kan worden en dat een vierkantsvergelijking ook wel eens geen wortels heeft.

Wij breken hiermede de eerste groep van onze opmerkingen af; we hebben hierin slechts als onze persoonlijke meening willen uitspreken, dat behandelingswijze en stofkeuze der schrijvers ons niet overal behagen; we kunnen ons zeer goed voorstellen, dat anderen er anders over denken.

Wanneer we nu echter tot de tweede groep overgaan, moeten we tot ons leedwezen vaststellen, dat het gebruik van het boek, ook voor hen, die zich met den opzet daarvan wel kunnen vereenigen,

practisch moeilijkheden zal opleveren door het wel zeer groot aantal onjuiste beweringen, foutieve redeneeringen en onzuivere uitdrukkingen, die er in voorkomen. De leeraar, die het zou willen gebruiken, zou zich vaak genoodzaakt zien, veranderingen te laten aanbrengen, die het prestige, dat een leerboek nu eenmaal in de oogen der schooljeugd behoort te bezitten, niet ten goede zouden komen.

Wij zullen hier geen volledig overzicht geven van de tekortkomingen, die wij bij het doorlezen van het werk hebben opgemerkt, maar zullen volstaan met voorbeelden.

Er bestaat, om met een punt van principiëel belang te beginnen, bij de schrijvers menigmaal verwarring tusschen de begrippenparen: functie en vergelijking, veranderlijke en onbekende, gelijkheid en identiteit. Zij spreken van functies van een of meer onbekenden, noemen elke functioneele betrekking een vergelijking (hierin het ongewenschte spraakgebruik der analytische meetkunde volgend), beschouwen gelijkheid als identiek met identiteit, gebruiken dan weer ineens het niet gedefinieerde begrip eener identieke vergelijking.

Uit Deel II vermelden we de volgende losse feiten:

blz. 69. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *omdat de quadraten van beide leden gelijk zijn.*

Volgens deze redeneering is $2 = -2$.

blz. 71. Uit het feit, dat a^4 het vierkant van $k.\,a^2$ is, wordt geconcludeerd $k = 1$. Waarom is niet $k = -1$?

blz. 74. *Zulke getallen, als* $\sqrt{5}$, $\sqrt{5{,}3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{0{,}716}$ *noemt men onmeetbaar of irrationaal...... Tot de onmeetbare getallen behoort ook het getal* π. Moet de lezer hier niet den indruk krijgen, dat π ook een vierkantswortel uit een rationaal getal is?

blz. 131. *Laat gegeven zijn de vergelijking*

$$7\,(x - 5) = 4\,(x - 5).$$

Het ligt voor de hand om beide leden dezer vergelijking door den gemeenschappelijken factor x—5 te deelen. Op welke eigenschap zou dit dan steunen? Het ligt toch voor de hand, dat men een bewezen eigenschap toepast. Er wordt dan geconstateerd, dat *deeling van de leden eener vergelijking door een gemeenschappelijken factor, die de onbekende bevat, tot verkeerde uitkomsten leidt. We hebben dit te vermijden.* Wij betwijfelen, of de leerling op deze wijze veel inzicht in het geval zal krijgen. Hij zal ongetwijfeld meenen, dat

verduisteren van wortels een noodlot is, dat hem boven het hoofd hangt, inplaats van een elementaire fout, die hij moet vermijden.

In Deel III viel ons onder meer het volgende op:

blz. 29. We lezen hier, dat de betrekkingen tusschen de wortels van een vierkantsvergelijking ons in staat stellen, elke rationale symmetrische functie van de wortels dier vergelijking in de coëfficienten uit te drukken. Dit is zeer juist. Aangezien ze ons echter ook in staat stellen, elke niet rationale of rationale en niet-symmetrische functie van de wortels uit te drukken in de coëfficienten, moet het den lezer wel duister blijven, wat met deze uitspraak bedoeld wordt.

In Deel IV komt op verschillende plaatsen een redeneering voor, die zoo door en door onjuist is, dat het ons raadselachtig is, hoe drie mathematici gezamenlijk de verantwoordelijkheid er voor willen dragen. We kiezen als voorbeeld blz. 30, waar voor $a > 1$ bewezen moet worden

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1$$

Stellen we $x = \frac{1}{n}$ en $a = 1 + p$, dan moet dus m.a.w. worden aangetoond

$$\lim_{n \to \infty} (1 + p)^{1/n} = 1.$$

Hiertoe is noodig, te bewijzen, dat, als voorgeschreven is een willekeurig positief getal ε, het mogelijk is, daarbij een getal N te kiezen, zoodat voor $n > N$

$$(1 + p)^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

De schrijvers stellen nu, om te beginnen, niet deze ongelijkheid op, maar de volgende

$$(1 + p)^{1/n} > 1 + \varepsilon$$

en trachten nu ε zoo te bepalen, dat hieraan voldaan wordt. Dit heeft natuurlijk al geen zin; neemt men echter een oogenblik aan, dat dit inderdaad het doel is, dat dus bij voorgeschreven n ε zoo bepaald moet worden, dat aan de ongelijkheid wordt voldaan, dan blijkt, dat hiertoe aldus geredeneerd wordt:

$$1 + p > (1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$$

Men heeft dus te nemen

$$\varepsilon < \frac{p}{n}$$

Maar dat spot dan toch met alle mathematische denken! Immers volgt nu omgekeerd uit

$$1 + p > 1 + n\varepsilon$$

ook

$$1 + p > (1 + \varepsilon)^n\ ?$$

En zullen de schrijvers, uitgenoodigd een getal grooter dan 6 te bepalen, ook de redeneering

$$x > 6 > 2$$

met de conclusie, dat men dus wel $x = 3$ kan nemen, goedkeuren?

Deze zelfde fout nu komt, voorzoover wij gezien hebben, in Deel IV niet minder dan driemaal voor; men vindt haar op blz. 28 onderaan (we stellen de schrijvers voor, hier eens de proef te nemen voor $n = -100$ en $p = 2$) en in bijzonder krassen vorm op blz. 128, waar ze zelfs gebruikt wordt, om de *gelijkheid*

$$\sqrt[n]{1 + p} = 1 + \varepsilon$$

te bewijzen.

Op bladzijde 30 wordt nu uit

$$(1 + p)^{1/n} > 1 + \varepsilon$$

in combinatie met

$$(1 + p)^{\frac{1}{n+1}} < (1 + p)^{1/n}$$

op een voor ons geheel raadselachtige wijze geconcludeerd

$$\lim_{n \to \infty} (1 + p)^{1/n} = 1$$

wat dan nog wel op de bekende slordige wijze wordt uitgedrukt, door te zeggen, dat $(1 + p)^{1/n}$ steeds meer tot 1 nadert. Nadert het wellicht *niet* steeds meer tot 0?

Wanneer we nog een oogenblik verwijlen bij hetzelfde Hoofdstuk II, waaraan we bovenstaande fouten ontleenden, een hoofdstuk, waaraan blijkens het voorbericht van Deel IV veel zorg is besteed, dan moeten we nog het volgende opmerken:

Op blz. 24 worden de termen *bovenste grens* en *benedenste grens* zonder definitie gebruikt en wel op een wijze, die den lezer in den waan moet brengen, dat ze identiek zijn met grenswaarde.

In de bepaling van grenswaarde op blz. 24 onderaan ontbreekt de wezenlijke toevoeging, dat bij voorgeschreven ε de ongelijkheid

$$|u - u_n| < \varepsilon$$

gelden moet voor $n > N$, waarbij N van ε afhangt.

De schrijvers maken op verschillende plaatsen een zonderling gebruik van de uitdrukking *zijn en blijven.* Wanneer b.v. op blz. 26 wordt voorgeschreven, dat vanaf een zekere waarde van n $|S - S_n|$ kleiner is dan ε, wat beduidt dan de toevoeging, dat $|S - S_n|$

ook kleiner *blijft* dan ε? Is het heusch noodzakelijk, te postuleeren, dat een bepaalde $|S - S_n|$ niet ineens weer $> \varepsilon$ zal worden, nadat de schrijvers eerst voor het tegendeel hebben gezorgd?

Op blz. 27 ontbreekt in de afleiding (niet in de formuleering) van het convergentiekenmerk voor reeksen met positieve termen de mededeeling, dat de ongelijkheid

$$\frac{u_i}{u_{i-1}} < q$$

slechts behoeft te gelden vanaf zekere waarde van i.

Hoe uit het afgeleide kenmerk voor reeksen met positieve termen iets kan worden geconcludeerd omtrent reeksen met termen, die afwisselend positief en negatief zijn, kunnen wij niet inzien.

Het afgeleide kenmerk wordt op blz. 28 toegepast, alsof het noodig was voor convergentie, inplaats van voldoende.

De schrijvers verzwijgen, dat uit de convergentie van de binomiaalreeks nog niet volgt, dat de reeks nu ook de functie voorstelt, waaruit ze door het formeele proces van toepassing der binomiaalformule is afgeleid. Dezelfde niet geoorloofde stilzwijgendheid ontmoet men ook telkens in Hoofdstuk IV.

Op blz. 50 staat, dat een functie, die binnen een bepaald interval doorloopend is, binnen dat interval een afgeleide heeft, die een eindige waarde heeft of nul is. De schrijvers weten natuurlijk heel goed, dat dit niet juist is; ze hebben er echter blijkbaar niet over willen spreken, dat een functie wel continu kan zijn en toch niet differentieerbaar. Waarom dan echter niet differentieerbaarheid ondersteld?

We willen thans nog een oogenblik onze aandacht richten op Hoofdstuk VI. Het begrip *aantal* wordt niet gedefinieerd. Men krijgt echter uit het voorbeeld op blz. 93 den indruk, alsof de schrijvers onder het aantal elementen eener klasse het natuurlijk getal n verstaan, met het opnoemen waarvan de telling besloten wordt. Hoe kunnen ze dan echter zonder meer op blz. 95 van een oneindig groot aantal spreken? Dat ze dit doen, wreekt zich in de zonderlinge beweringen van blz. 95, waar men b.v. leest, dat het aantal termen van een onbegrensde rij niet verandert, als men een of meer termen schrapt of toevoegt. Waarom maken de schrijvers hier geen gebruik van het begrip gelijkwaardigheid of aequivalentie?

Op bladzijde 96 staat een onzinnige definitie van *oneindig groot*.

Op blz. 123 lezen we, dat tot de irrationale getallen behooren de logarithmen van getallen, die geen *geheele* macht van de basis zijn en de goniometrische functies op *enkele* uitzonderingen (een eindig aantal?) na.

Het zou ons te ver voeren, nog op verschillende leemten in de ontwikkeling van het getalbegrip te wijzen; slechts willen we nog even opmerken, dat wij op blz. 124 den indruk krijgen, dat de schrijvers willen zeggen, dat $\sqrt{2}$ te definieeren is als grenswaarde eener fundamentaalrij. Dit zou principiëel onjuist zijn. Ook kan men niet zeggen, dat Dedekind zich de rij der rationale getallen door een *reëel* getal (rationaal of irrationaal) verdeeld dacht in twee gebieden. Immers hoe kan een irrationaal gebruikt worden, om een snede te definieeren als het zelf pas door een snede gedefinieerd wordt?

Intusschen meenen wij hier wel dit betoog te kunnen afbreken.

Aangaande het historisch overzicht moge nog worden opgemerkt, dat de gedachte, door het geven van zulk een overzicht den leerling een indruk te geven van de ontwikkeling der wiskunde, ons zeer sympathiek is. De schrijvers zullen het echter wel met ons eens zijn, dat zoolang de gebrekkige historische opleiding van den a.s. leeraar in wiskunde maken zal, dat de docent vaak niet meer van de historie afweet, dan hij in dit overzicht kan lezen, van de werkelijke behandeling niet veel terecht zal komen. Verder is op de juistheid van het historisch overzicht nog wel eens wat af te dingen. Zoo zijn, naar het ons voorkomt, de schrijvers niet geheel doorgedrongen in de ware beteekenis van de exhaustiemethode; men krijgt den indruk, alsof zij alleen hebben gelet op het insluiten van de te bepalen grootheid tusschen twee grenzen en niet op de dan volgende reductio ad absurdum, die de methode volkomen onaantastbaar maakt. De exhaustiemethode mag in geen geval als een soort van inferieure redeneerwijze worden voorgesteld; een goed exhaustiebewijs is verre te verkiezen boven een slordigen limietovergang!

Als slotconclusie zouden wij willen zeggen, dat het boek van de heeren Yntema, Drewes en Bloten, ondanks de vele te waardeeren bedoelingen van de schrijvers nog zooveel onvolkomenheden in de uitwerking vertoont, dat het niet kan worden aanbevolen.

H. J. E. Beth.
E. J. Dijksterhuis.

DE DRIEVLAKSHOEK

DOOR

S. W. F. MARGADANT.

De bewijzen der eigenschappen van den drievlakshoek, die men in de leer- en handboeken der stereometrie vindt, zijn verre van gemakkelijk. Getroffen door de tegenstelling tusschen den eenvoud, evidentie haast, der eigenschappen, en het ingewikkelde der bewijzen, heb ik getracht een eenvoudiger betoog te bedenken. Het is mij mogen gelukken, twee methoden te vinden, die m. i. door gemak en sierlijkheid de gewone manier van doen verre overtreffen. Het eerste bewijs moge, met al wat er aan vast zit, ten slotte niet korter zijn dan het gebruikelijke: het heeft, naar ik meen, toch het voordeel, dat de weg zich vanzelf wijst, zoodat het leeren weinig moeite kost en het zich gemakkelijk in het geheugen laat prenten. Wat de tweede methode betreft: ofschoon deze belangrijk gemakkelijker is dan de eerste, lijkt zij mij toch voor het onderwijs van minder waarde, daar de eerste meer tot de verbeelding spreekt. Immers het beginsel er van wordt wel als geheugenmiddel aangewend: het zoogenaamde paraplubewijs. Schreef ik een leerboek, dan zou ik derhalve volgens de eerste methode te werk gaan. In het volgende heb ik aangegeven, hoe het desbetreffende hoofdstuk ingericht zou zijn. Aangezien echter het schrijven van een zoodanig werk niet op mijn weg ligt, geef ik aan elken auteur gaarne de vrijheid, van het hier uiteengezette zoodanig gebruik te maken, als hem goeddunkt.

* * *

Een drievlakshoek heeft de volgende eigenschappen:

1. De som der zijden is kleiner dan 360°.
2. De som der hoeken is grooter dan 180°.
3. De som van twee zijden is grooter dan de derde zijde.
4. Zijn twee hoeken gelijk, dan zijn de zijden daar tegenover ook gelijk.
5. Zijn twee hoeken ongelijk, dan ligt tegenover den grooteren hoek de grootere zijde.

6. Zijn twee zijden gelijk, dan zijn de hoeken daar tegenover ook gelijk.
7. Zijn twee zijden ongelijk, dan ligt tegenover de grootere zijde de grootere hoek.

Alvorens tot het bewijzen van deze eigenschappen over te gaan, houden wij de volgende beschouwing.

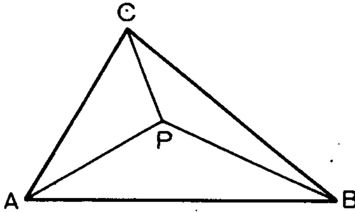


Fig. 1.

ABC is een driehoek, en P een punt daar binnen, door rechten met de hoekpunten verbonden. Licht men P uit het vlak des driehoeks op, en brengt men vlakken aan door P en de zijden van den driehoek, dan ontstaat een drievlakshoek met P tot top en de hoeken APC, BPC en CPA tot zijden. De oorspronkelijke figuur kan derhalve beschouwd worden als de limiet van een drievlakshoek. Nu voelt men, dat, naarmate P verder van het vlak ABC af komt, de zijden van den aldus gevormden drievlakshoek op den duur hoe langer hoe kleiner worden, en tot nul naderen. Want als P zeer ver van vlak ABC af is, naderen de ribben PA, PB, PC tot den evenwijdigen stand, de door haar gevormde hoeken dus tot nul. Hiermede is de eerste eigenschap aannemelijk gemaakt: want in den beginstand is de som der zijden gelijk aan 360°.

Ook voelt men, dat de hoeken van den drievlakshoek op den duur kleiner worden, naarmate P zich van vlak ABC verwijdert. In den beginstand zijn de standhoeken elk 180°, samen dus 540°, bij het andere uiterste (P op oneindigen afstand) naderen de ribben tot den evenwijdigen stand, worden de standhoeken die van een driezijdig prisma, nadert derhalve hun som tot 180° (eigenschap 2).

Met het bovenstaande nu zijn de eigenschappen aannemelijk gemaakt, niet bewezen. Tot het bewijs komt men als volgt.

Zonder aan de algemeenheid te kort te doen, kan men aannemen dat elke drievlakshoek ontstaan is doordat het punt, waarvan boven sprake is, zich *loodrecht* uit vlak ABC verheft. Brengt men toch een willekeurig vlak aan, dat de drie ribben snijdt, en projecteert men den top P (projectie P′) van den drievlakshoek op dat vlak, dan kan men zich voorstellen, dat de drievlakshoek ontstaan is door *loodrechte* verplaatsing van P′ uit vlak ABC.

Wij beschouwen nu eerst het geval, dat de projectie P′ van P binnen △ ABC komt te liggen, en dat de loodlijnen uit P′ op de zijden van den driehoek binnen de driehoeken P′AB, P′BC en P′CA vallen. Daarna zullen wij de noodige correcties aanbrengen om het betoog algemeen geldend te maken.

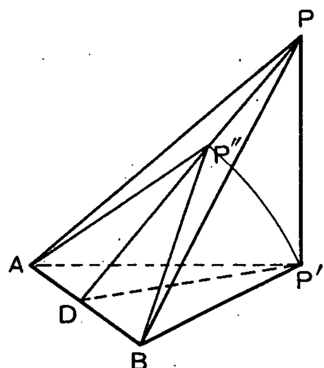


Fig. 2.

Men bewijst dan gemakkelijk, dat de hoeken bij P (de zijden van den drievlakshoek) elk kleiner zijn dan de hoeken bij P′ (de projecties der zijden op vlak ABC).

Bewijs. Trek P′D ⊥ AB, en verbind D met P. PD is nu ook loodrecht op AB: want AB ⊥ PD en ⊥ PP′, dus loodrecht op het vlak PDP′. PD is als hypotenusa in △ PDP′ grooter dan P′D. Laat nu △ ABP′ draaien om AB, totdat hij in het vlak van △ ABP komt te liggen. Het punt P′ komt dan in P″, binnen △ ABP. Volgens eene bekende eigenschap der planimetrie is nu ∠ APB kleiner dan ∠ AP″B, dus kleiner dan ∠ AP′B.

Het bovenstaande gaat niet door, indien de hoogtelijn P′D buiten △ P′AB valt. Dit geval kan zich voordoen, als de drievlakshoek een of meer stompe hoeken heeft. Men heeft echter vrijheid genoeg in de keuze van vlak ABC om deze moeilijkheid te ontgaan, bijv. als volgt:

Zet van P uit op de ribben gelijke stukken PA, PB en PC af. De projectie P′ is dan het middelpunt van den omgeschreven cirkel van △ ABC. De loodlijnen uit P′ op de zijden van △ ABC vallen dan binnen de driehoeken P′AB, enz., immers het zijn de middelloodlijnen. Valt P′ buiten △ ABC, zoo geeft dit geen moeilijkheid, omdat in dat geval ∠ AP′B + ∠ BP′C + ∠CP′A zelfs kleiner dan 360° is.

Thans de bewijzen der eigenschappen van den drievlakshoek.

Bewijs van Eigenschap 1. Volgens het bovenstaande is:

$$\angle APB < \angle AP'B$$
$$\angle BPC < \angle BP'C$$
$$\angle CPA < \angle CP'A$$

——————————————— opgeteld

Som der zijden < 360°

$$a + b + c < 360^\circ.$$

Bewijs van Eigenschap 2. Toepassing der vorige eigenschap op den pooldrievlakshoek geeft:

$$180° - A + 180° - B + 180° - C < 360°$$
$$A + B + C > 180°.$$

Opmerking. Daar elk der standhoeken kleiner is dan 180°, heeft men:

$$A + B + C < 540°.$$

Men vindt dit ook, door $a + b + c > 0$ op den pooldrievlakshoek toe te passen.

Bewijs van Eigenschap 3. Toepassing van eigenschap 1 op een nevendrievlakshoek geeft:

$$180° - a + 180° - b + c < 360°$$
$$a + b > c.$$

Bewijs van Eigenschap 4.

Ond. $A = B$. Gest. $a = b$.

De analoge eigenschap der planimetrie kan men bewijzen door den driehoek uit het vlak te lichten, om te keeren, en weer in het vlak te leggen. De driehoek kan dan zoo geplaatst worden, dat zijne hoekpunten vallen op de oorspronkelijke plaatsen der hoekunten. Evenzoo kan men de stereometrische eigenschap bewijzen door te laten zien, dat de drievlakshoek in den tegendrievlakshoek geschoven kan worden zóó, dat de vlakken twee aan twee samenvallen.

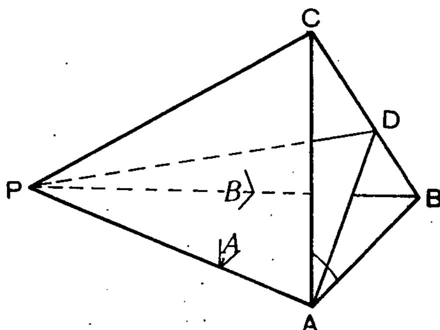


Fig. 3.

Bewijs van Eigenschap 5.

Ond. $A > B$. Gest. $a > b$.

Breng vlak APD aan zóó, dat in den drievlakshoek ABDP de standhoek op de ribbe AP gelijk is aan dien op de ribbe BP.

Volgens de vorige eigenschap is dan $\angle APD = \angle DPB = p$.

Toepassing van Fig. 3 op den drievlakshoek P. ACD geeft:

$$(a - p) + p > b$$
$$a > b.$$

Bewijs van Eigenschap 6.

Ond. $a = b$. Gest. $A = B$.

Deze wordt uit het ongerijmde bewezen, met behulp van 4 en 5, of met behulp van den pooldrievlakshoek.

Bewijs van Eigenschap 7.

Ond. $a > b$. Gest. $A > B$.

Deze wordt bewezen als de vorige eigenschap.

Tweede methode.

Men onderscheide de drievlakshoeken in de volgende twee soorten:

1. drievlakshoeken met minstens twee niet stompe zijden;
2. drievlakshoeken met minstens twee stompe zijden.

Eerste soort. Aangezien twee zijden niet grooter zijn dan 90°, en de derde zijde kleiner is dan 180°, heeft men:

$$a + b + c < 360°.$$

Hieruit volgt (zie boven het bewijs van Eigenschap 3), dat de som van twee zijden grooter is dan de derde.

Tweede soort. Zijn a en b stomp en is c scherp of stomp, dan heeft de nevendrievlakshoek, ontstaan door verlenging van de ribbe tegenover c, tot zijden:

$$c,\ 180° - a,\ 180° - b.$$

De beide laatste zijn scherp: het is dus een drievlakshoek van de eerste soort. Hiervan is zoo juist bewezen, dat de som van twee zijden grooter is dan de derde. Dit geeft:

$$c + 180° - a > 180° - b, \text{ of } c + b > a.$$
$$c + 180° - b > 180° - a, \text{ of } c + a > b.$$
$$180° - a + 180° - b > c, \text{ of } a + b + c < 360°.$$

Voorts heeft men:

$$180° - a < 90°$$
$$180° - b < 90°$$
$$c < 180°$$

opgeteld

$$360° - a - b + c < 360°$$
$$a + b > c.$$

EEN WISKUNDE-BOEK UIT HET LAATST DER 17e EEUW

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT.

Het artikel van den heer *A. Hallema* over onze oudste 17e eeuwsche rekenboeken bracht mij een merkwaardig boek in herinnering, dat in mijn bezit is en waarvan het wel de moeite waard is den lezers van het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde iets mede te deelen. Het bedoelde boek is getiteld „De geheele Mathesis of Wiskonst, herstelt in zijn natuurlijke gedaante" door Abraham de Graaf. Het werd gedrukt bij Jacobus de Veer t' Amsterdam voor Jan ten Hoorn, Boekverkooper over 't Oude Heeren Logement, in de History Schrijver, 1694.

Reeds de „voorreden", die aan het eigenlijke werk vooraf gaat, en die gedateerd is Amsterdam den 12 Maart 1676 is buitengewoon interessant. De schrijver begint met zeer bescheiden op te merken, dat zijn boek maar een onrijp werk is en „slechts onder de drukpers gelegt om de uitschrijving te voorkomen." Nu, dit laatste zal wel waar zijn als men bedenkt, dat het boek 318 pagina's groot formaat telt en voorzien is van een groot aantal teekeningen. Het eerste deel van zijne opmerking zal wel niet zoo letterlijk bedoeld zijn. Althans even verder gaat de schrijver voort: „Men heeft getracht, zooveel doenlijk was, deze naukeurige eeuw te voldoen; met alle overtolligheden te mijden; met de beginselen klaarlijk voor te dragen; en met de gevolgen van dien door een natuurlijke aaneenschakeling daarvan af te leijden; of in een woort, met de natuur van de zaak te ontleden, en niet anders: ten eijnde dat dese beschrijving zoude mogen dienen om deze konsten gemakkelijk te verstaan, ras te kennen, en lang te onthouden". Nu wordt meêgedeeld, dat het werk verdeeld is in dertien „stukjens of boeken, omdat wij oordeelen dat de Mathesis in zooveel weten-

schappen bestaat, die yder van een bezondere aart zijn." Die boeken, waarvan de schrijver dan eene opsomming geeft met eene korte aanduiding van den inhoud, zijn de volgende: I De Proportiën, II Arithmetica of de Rekenkonst, III Geometria, IV Trigonometria of Driehoeksmeting, V Astronomia of Starrekonst, VI De Lantmeetkonst, VII De Navigaty of de konst van de Groote zeevaart, VIII Fortificaty of Sterktebou, IX De Gnomica, X De Perspectief, XI Van de Optica, Dioptrica en Catoptrica, of de Gezichtkunde, de Vergezichtkunde en de Spiegelkunde, XII De Mechanica of de Weegkunst, XIII De Algebra of de Stelkonst.

Men ziet, er werd oudtijds heel veel tot de wiskunde gerekend, wat men daar tegenwoordig niet direct meer bij telt. Toch werd er ook reeds verschil gemaakt tusschen zuivere en toegepaste wiskunde. Want in de voorrede volgt op de gegeven indeeling nog deze opmerking: „De vier eerste Boeken begrypen het fondamentele van de Mathesis, de overige gebruyken deze tot behulp, uytgenomen het laatste, dat op zich zelfs bestaat: naukeuriglijk genomen, zoo moet men de drie eerste en het laatste maar als fondamenteel estimeren, als niet met den anderen gemeen hebbende."

Het tweede deel der voorrede handelt „van de nuttigheit der Mathesis." Dit geeft zulk een aardigen kijk op de eigenaardige opvatting van dien tijd, dat ik niet nalaten kan althans een deel daarvan hier op te nemen:

„In twee opzichten is de Wiskonst voordeelig, in het Practice en in het Theoretice.

Van het Practice heeft de werelt een groot gevoel: indien men alles uijt hen weg nam, dat de Mathesis hen van tijt tot tijt heeft meêgedeelt, men zou haast gewaar werden datze van veel dingen ontbloot zoude wezen, die hen nu seer ter stade komen.

Hoe weijnig konnen de kooplieden, en ook bijna alle andere, die eenig bewint hebben, de Arithmetica missen; de Navigaty maakt een zeeman stout, en doet hem ver van lant afsteken, dat de ouden noit en derfden bestaan, waardoor men de vruchten, en andere dingen, daar van het eene deel van de werelt een groote overvloet heeft, brengt in het ander, waarin ze schaars zijn, tot groot gerief van beijde de inwoonders, en merkelijk voordeel van de koopman, en alle die daar van afhangen; de Fortificaty doet ons het onze gerustelijk behouden; de Mechanica verlicht de arbeijt, die zonder dat bijna ondoenlijk zoude wesen; ze onder-

schept de wint, en ook de lopende wateren, en doet ze voor de menschen arbeijden. De Dioptrica doet ons wel zien; de oude doet ze van nabij zien, en de stikziende van verre door brillen; door verrekijkers wijst ze ons aan het onzichtbare dat aan den hemel is, en door vergrootglazen het onzienlijke op de aarde; de Lantmeetkonst geeft yder zijn deel van de aarde; en de Gnomica wijst ons de tyt aan.

En alhoewel sommige van deze dingen tot een hantwerk geworden zijn, zulks dat men ze de werelt te nut maakt zonder iets van de Wiskonst te kennen, zoo is het echter met de andere zoodanig niet gelegen, omdat ze een persoon vereysschen die van hen kennisse heeft.

Het Theoretice brengt de ziel geen minder nut toe als het lichaam: Het leert wel opmerken; wel oordeelen; en onwrikbaar besluiten; welke dingen de ware grontvesten zijn van alle wijsheit: zonder deze komt men nergens toe; 't is al bouvallig wat hier niet van onderschraagt is. Ymant deze hebbelijk hebbende, zal van alles wat hem voorkomt, voorzichtig oordeelen, en niet onderworpen wezen, zoo veele veranderingen als de meeste menschen onderhavig zijn. Het voorwerp, waar door men deze hoedanigheden verkrijgt, is wel bezonder, maar het gebruyk is algemeen: in alles, wat ons in de werelt voorkomt, komt dit te pas. Die er deze gestalte van geest niet door overwint, heeft weynig gevordert, daar hij anders een onwaardeerlijke schat bekomt. Een welgetemperde heeft dit wel ten deelen uyt de natuur, doch wort hier door volmaakt: een die zoo goede hoedanigheden niet en heeft, verkrijgt ze hierdoor, of hy vordert ten minsten tot een hooge trap. Andere wetenschappen vallen dan licht, en veele leert men gemakkelijk uyt de boeken, die andersints met onderwijs noch swaar vallen.

En alhoewel de geheele Mathesis behulpzaam is tot de verkrijgingh van deze zoo loffelijke gestalte van de geest, zoo doen echter de drie eerste en het laatste Boek het meeste hier toe, en voornamelijk het darde en het dartiende: van het darde leert het eerste deel wel bewijzen, en het overige, en ook het dartiende wel uytvinden; beyde niet anders zijnde als een afleijding, tonende hoedanig de besluyten en de begeerders van haare oorzaken afhangen; en schoon dit maar alleenlijk in die gevallen aangewesen wert, zoo ziet men echter de maniere hoe zulx plaats heeft in alle andere.

En omdat deze dingen niet als zuyver verstaanlijk zijn, zoo volgt daaruyt dat men met meerder gemak zal konnen redenkavelen in de dingen, die van zoodanigen natuur zijn, gelijk het Goddelijke: men zal niet alleen haast gewaar werden de noodzakelijke wezentlijkheit van een Goddelijk wezen, maar ook veele van zyne eygenschappen; waarbij voegende de kennisse van ons zelfs, na ziel en na lichaam, zoo zal 't, in veele gevallen, niet swaar vallen te oordelen wat goet en wat quaat is, dat ons dan een groot licht zal toebrengen, om te weten wat wij doen en laten moeten, en een groote verzekering geven van de Christelijke Religie."

De waarheid zijner beweringen tracht de auteur vervolgens te staven door aanhaling van de voorrede der „Nieuwe beginselen van de Meetkunst", welks schrijver niet genoemd wordt, eene aanhaling, die veel te lang is om ze hier geheel op te nemen. Aardig is ongetwijfeld, wat daarin over de Meetkunde gezegd wordt: „Zij (d. i. de meetkunde) heeft gantschelijk niets, 't welk, hoeweijnig het ook is, de neiging der Ziel naar de zinnen kan begunstigen. Haar voorwerp is niet aan de begeerlijkheit gebonden. Zij is onbequaam tot de welsprekentheit en tot de bevallijkheit in de taal. In haar is niets 't welk de hartstochten aanprikkelt. Zij heeft niets dat gantschelijk te beminnen is dan de waarheit; en zij vertoont haar aan de ziel geheel naakt, en van al 't geen ontbloot, 't welk men het meeste in andere dingen bemint."

En iets verder: „Want zij van d' een zijde, beginzelen verschaffende, die warelijk klaar zijn, geeft aan ons het voorschrift van de klaarheyt en klaarblijkelijkheit, om de gene, die hetzelfde hebben, van degene, die 't niet hebben, t' onderscheiden; en van d' andere zijde, dewijl zij zich nooit van d' onderhouding en waarneming dezer twee regelen ontslaat, zoo gewent zij het verstant tot hen te gebruiken, en altijt tegen de dubbelzinnigheyt der woorden, en tegen de verwarde beginzelen, die de twee gemeenste oorspronken der quade redeneringen zijn, op zijn hoede te wezen."

Het zal ongetwijfeld allen, die in den tegenwoordigen tijd klagen over achteruitgang van het peil van ons wiskunde-onderwijs en over algemeen gebrek aan energie, goed doen de „oeffening der Meetkunst" te hooren aanprijzen als een hulpmiddel tegen „zekere luijheit, of liever een murwigheijt van geest, die hen van al 't geen doet walgen, 't welk eenige kracht en poging vereischt."

„Zij (te weten de Meetkundige oeffening) port aan om de waarheit lief te hebben. Zij leert het onderscheiden. Zij versterkt de reden. Zij strekt het gezicht des verstants uit. Zij geeft gelegentheit om over de grootheid der menschelijke Ziel verwondert te zijn, en om t' erkennen dat zij niet anders dan geestelijk en onsterffelijk kan wezen."

Na deze aanhaling besluit de heer *De Graaf* dit deel van zijn voorreden met de volgende raadgevingen: „Die zich tot de studie wil begeven, de letteroeffening volbracht hebbende, kan niet beter doen als deze voor zijn tweede aanvangen, omdat hij, deze (d. i. de wiskunde) kennende, met meerder spoet in zijn voorgenomene zal vorderen, en met meerder fondament daar in zal voortgaan, en alzoo eerder tijt winnen als verliezen. Is hij maar van een gemeen begrip, zoo staat dan wat goets van hem te hoopen, daar hem anders de duijsterheid in de bevatting, en de langwijligheid van de studi, veeltijts doet wanhopen om tot een goet eijnde te geraken. De ondervinding leert ons dat veele, in 't geene zij voornemen, blijven steken, maar de Mathesis vooraf hebbende, zal dit zelden gebeuren. Hij hen gemakkelijk vindende om te verstaan, en alzoo goede voortgang doende, zal hem gemoedigt vinden om te vervolgen, en alzoo gewisselijk tot een goed eijnde geraken.

Die geen Student wil worden, kan echter niet beter doen als zijn eerste opmerking, die hij in de werelt wil nemen, hier in te besteden, zoo hij slegs gelegentheid heeft om twee of drie uren des daags hier toe te besteden, en dat een jaar te volharden.

Imant dan begerig zynde om zich in deze konst te oeffenen, moet voor al uit zien naar een goede leytsman, dewijl het onderscheit zeer groot is; 't is geen Meester, die alleenlyk de konst verstaat, maar wel die hen aan andere op een bequame wijze weet mede te deelen. Die de voornoemde nuttigheden uyt de Mathesis zelfs niet getrokken heeft, zalze aan een ander niet konnen tonen, en alzoo zalmen gevaar lopen dat voordeel daar door te genieten: als de Meester een pedant is, een discipel zal niet veel beter werden; ten minste hij zal veel van die besmettelijke ziekte, die de onderwijzers zoo eigen schijnt te wezen, overerven, en moeijten hebben zich in een natuurlijke gestalte te herstellen: een Meester, die niet weet te geven en te nemen, te lichten en te swaren, of die zich niet, in alle gelegentheden, weet te voegen, zoodanig, dat